Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti
MODENA

ATTI
del Convegno di Studi
in memoria di
Giuseppe Gemignani
(Modena - 20 maggio 1994)

MUCCHI

Carlo Felice Manara

SISTEMA DI ASSIOMI PER UN INSIEME UNIDIMENSIONALE TOPOLOGICAMENTE CHIUSO

§ 1. *Legenda*

1 - Nel seguito F indicherà un insieme che possiede almeno 4 elementi.

2 - Gli elementi di F saranno indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto latino, alle quali potranno essere apposti uno o più apici a destra:

$$a,\ a',\ a'',\ a,\ b',\ b'',\ c, \ldots\ldots x,\ y,\ z,\ u,\ \&c.$$

Gli elementi di F potranno anche essere chiamati convenzionalmente «punti». Le operazioni su elementi di F saranno indicate con lettere majuscole. L'identità sarà indicata con la lettera I.

Si scriverà il simbolo dell'operazione dopo il simbolo dell'elemento sul quale essa opera; così per esempio il simbolo:

$$xS(a)$$

indicherà l'elemento di F nel quale l'operazione S(a) porta l'elemento x.

Per il prodotto (applicazione successiva) di operazioni su F vale ovviamente la proprietà associativa; inoltre si scriverà:

$$xS(a)S(b)$$

per indicare l'elemento:

$$[xS(a)]S(b).$$

3 - I quantificatori universale ed esistenziale saranno indicati premettendo i simboli «$\forall$» ed «$\exists$» rispettivamente alle lettere interessate; così per esempio:

$$\forall x P(x)$$

sarha letto «per tutti gli x è vera P(x)» o anche «a tutti gli x compete il predicato P». E per esempio

$$\exists x P(x)$$

sarà letto: «esiste (almeno) un x per cui P(x) è vera» o anche: «il predicato P compete ad (almeno) un x».

4 - Il connettivo «et» di congiunzione tra due proposizioni sarà indicato scrivendo il simbolo «&» tra i simboli delle proposizioni stesse, come segue:

$$P \& Q.$$

5 - Il connettivo «vel» di alternativa tra due proposizioni verrà indicato interponendo il simbolo «v» tra i simboli delle proposizioni stesse, come segue:

$$P \vee Q.$$

6 - P e Q essendo due proposizioni, la formula:

$$P \Rightarrow Q$$

indicherà che dalla ipotesi P si deduce la Q.

7 - P e Q essendo due proposizioni, la formula:

$$P \Leftrightarrow Q$$

indicherà che dalla P si deduce la Q e viceversa, ossia che la validità di una delle proposizioni è condizione necessaria e sufficiente per la validità dell'altra.

8 - Il simbolo «$\neg$» scritto prima del simbolo di una proposizione indicherà la megazione della proposizione stessa; quindi:

$$\neg P$$

indica la proposizione che è falsa quando P è vera e vera quando P è falsa.

9 - Il simbolo «=» posto tra i simboli di due elementi di F indicherà che questi due ultimi coincidono, cioè che i due simboli sono nomi diversi di uno stesso elemento di F. Invece, se «=» è posto tra i simboli di due operazioni, indicherà la coincidenza dei risultati delle operazioni stesse per ogni elemento di F. Quindi per esempio, scrivendo:

$$S(a)=S(b)$$

si intenderà indicare la validità della proposizione:

$$\forall x\{xS(a)=xS(b)\}.$$

Se fra due enti (elementi di F oppure operazioni) non sussiste la relazione «=», si indicherà tale fatto con il simbolo «=/=» scritto tra i simboli degli enti in parola; così per esempio la formula:

$$x=/=y$$

indicherà che gli elementi x ed y non coincidono.

§ 2.

Gli assiomi che enunceremo hanno lo scopo di fornire la definizione implicita di certe operazioni sugli elementi di F.

** AX 1 - $\forall x[xS(x) = x]$.

L'operazione «S(x)», funzione del punto x, ha sempre x come punto unito.

** AX 2 - $\forall x\exists x'[x'=/=x \;\&\; x'S(x)=x']$.

L'operazione S(x) ha un secondo punto unito, x', diverso da x.

** AX 3 - $\forall x,y\{yS(x) = yS(x')\}$.

L'operazione S(x') ha sempre lo stesso risultato della S(x).

Quindi si avrà:

$$\forall x\{S(x) = S(x')\} \qquad (1)$$

TEO. 1 - Si ha:

(2) $$\forall x,x'\{xS(x') = x\}$$

x è sempre unito per S(x').

Dim. Da AX 1, 3, e da (1), ponendo x al posto di y.

OSSERVAZIONE 1 - L'insieme delle formule che precedono non varia scambiando x con x'; ne consegue che esiste una corrispondenza involutoria che fa corrispondere tra loro i punti come x ed x', che sono distinti e che sono uniti per la medesima operazione S. Questa corrispondenza sarà chiamata nel seguito convenzionalmente «involuzione assoluta» su F ed indicata col simbolo A. Si avrà quindi:

(3) $$x' = xA \quad ; \quad x = x'A;$$

e quindi:

(4) $$A^2=I;$$

e la (1) può essere scritta nella forma:

(1a) $$S(x) = S[xA].$$

* * *

§ 3.

** AX 4 - $\forall x,y,z\{[x=/=y \ \& \ x=/=y'] \Rightarrow [zS(x) =/= zS(y)]\}$.

TEO. 2 - Si ha:

$$\exists z\{zS(x) = zS(y)\} \Rightarrow [(x=y) \vee (x'=y)].$$

Se esiste uno z sul quale le due operazioni S(x) ed S(y) danno lo stesso risultato, allora y deve coincidere con x oppure con x'.

Dim. La proposizione è la contronominale di AX 4. Infatti questo assioma è della forma:

$$[\neg P \ \& \ \neg Q] \Rightarrow \neg R.$$

Di qui si ha:

$$R \Rightarrow \neg[\neg P \ \& \ \neg Q];$$

applicando le leggi di De Morgan si ottiene:

$$R \Rightarrow [P \vee Q].$$

TEO. 3 - $[xS(y) = x] \Rightarrow [(x=y) \vee (x'=y)]$.
Dim. Si ha, per ipotesi:

$$xS(y) = x;$$

ma è anche, per AX 1:

$$xS(x) = x.$$

Da queste segue la tesi per Teo. 2, ponendo x al posto di z.

OSSERVAZIONE 2 - Dai teoremi precedenti segue che y ed y' sono i soli elementi uniti per S(y).

** AX 5 - $\forall x,y\{xS(y)S(y) = x\}$
Ogni operazione S è involutoria.
Scriveremo quindi:

(5) $$\forall y\{S(y)S(y) = [S(y)]^2 = I\}.$$

** AX 6 - $\forall x,y \exists z\{xS(z)=y\}$
Data una coppia qualunque di elementi x,y, esiste almeno un elemento z tale che S(z) porta x in y.

** AX 7 - $\forall x,y,z \exists u\{S(x)S(y)S(z) = S(u)\}$.

CONVENZIONE - Indicheremo con S l'insieme delle operazioni che abbiamo preso finora in considerazione ed indicate con i vari simboli, come S(x), S(y) ecc.

Con questa convenzione, il contenuto di AX 7 può essere esposto dicendo che il prodotto di tre operazioni di S è ancora un'operazione di S.

* * *

§ 4.

Indichiamo con T l'insieme delle operazioni su elementi di F, ciascuna delle quali è prodotto di due operazioni di S.

TEO. 4 - Un'operazione di T che abbia un elemento unito è l'identità.
Dim. Supponiamo che si abbia, per un elemento x di F:

$$xS(a)S(b) = x. \tag{6}$$

Operando a destra su entrambi i membri della (6) con S(b) e tenendo conto di (5) si ottiene:

$$xS(a) = xS(b); \tag{7}$$

di qui, per Teo. 2 si ha:

$$(b=a)\vee(b=aA); \tag{8}$$

in entrambi i casi, per (1) si ha:

$$S(a)S(b)=I. \tag{9}$$

OSSERVAZIONE 3 - Si ha ovviamente:

$$\forall a,b\{[S(a)S(b)][S(b)S(a)]\} = I. \tag{10}$$

Quindi ogni operazione dell'insieme T ha una inversa.
In forza di AX 7 e della associatività del prodotto si conclude quindi che T è un gruppo.

TEO. 5 - Un'operazione del gruppo T è univocamente determinata dalla condizione di portare un elemento x in un dato elemento y.
Dim. Si abbia, per ipotesi:

$$xS(a)S(b) = y \quad ; \quad xS(p)S(q) = y; \tag{11}$$

e di qui, per il Teo. 4,:

(12) $$S(a)S(b)S(q)S(p) = I;$$

ne consegue che si ha:

(13) $$S(a)S(b) = S(p)S(q).$$

OSSERVAZIONE 4 - Dal Teo. precedente si ha che ogni operazione del gruppo può essere rappresentata in più modi come prodotto di due operazioni dell'insieme S.

CONVENZIONE - Dati due elementi x,y, l'operazione di T che porta x in y verrà anche indicata con il simbolo «T(x,y)». Si avrà quindi:

(14) $$xT(x,y) = y.$$

TEO. 6 - Il gruppo T è abeliano.

Dim. Siano x, y, z tre elementi di F; sia u un elemento, esistente per AX 6, tale che si abbia:

(15) $$xS(u) = y,$$

e sia w un elemento analogo, tale che si abbia:

(16) $$yS(w) = z.$$

Tenuta presente l'Oss. 4 si ha:

(17) $$T(x,y) = S(u)S(y) \; ; \; T(y,z) = S(y)S(w),$$

e quindi, per AX 5:

(18) $$T(x,y)T(y,z) = S(u)S(y)S(y)S(w) = S(u)S(w).$$

Ma per AX 5 e 7 si ha:

(19) $$[S(y)S(w)S(u)][S(y)S(w)S(u)] = I;$$

e da questa si trae:

$$(20) \qquad S(u)S(w) = [S(y)S(w)][S(u)S(y)\} = T(y,z)T(x,y)$$

Il confronto tra la (18) e la (20) dimostra il teorema.

§ 5.

Consideriamo in particolare una qualunque coppia di elementi x, xA, e sia y uno degli elementi (esistente per AX 6) tale che sia:

$$(21) \qquad xA = xS(y).$$

Da AX 2 ed (1a) segue:

$$(22) \qquad xA = xS(y)S(x).$$

Ma da AX 1 e dalla (21) si ha:

$$(23) \qquad xA = xS(x)S(y).$$

Da (22) e (23), per l'arbitrarietà di x segue il

TEO. 7 - Se è:

$$(21) \qquad xA = xS(y)$$

si ha:

$$(22) \qquad S(x)S(y) = S(y)S(x).$$

TEO. 8 - Nell'ipotesi (21) si ha:

$$(24) \qquad [S(x)S(y)]^2 = I.$$

Dim. La dimostrazione segue dalla (22), da AX 7 e dalla involutorietà di ogni S.

OSSERVAZIONE 5 - Le (22) e (23) esibiscono la corrispondenza A, introdotta nel §2, come una operazione involutoria del gruppo abeliano T.

TEO. 9 - Nell'ipotesi (21) si ha:

$$yA = yS(x). \tag{25}$$

Dim. Poniamo per un momento:

$$u = yS(x).$$

Di qui si ha:

$$uS(y) = yS(x)S(y) = yS(y)S(x) = yS(x) = u. \tag{26}$$

Quindi u è un elemento unito per S(y), e pertanto per Teo. 3., si ha:

$$(u=y)v(u=yA). \tag{27}$$

Ora non può essere $u=y$, perché u sarebbe allora unito per S(x). Deve quindi valere la (25).

§ 6.

Mantenendo le notazioni dei §§4, 5 indichiamo con il simbolo:

$$Q = T(x,y) \tag{28}$$

la operazione del gruppo abeliano T che porta x in y. Si ha quindi:

$$y = xQ. \tag{29}$$

Per AX 1 si ha:

$$y = xS(x)Q, \tag{30}$$

e la operazione S(x)Q, per AX 7, è ancora una S.
Quindi si ha:

$$S(x)QS(x)Q = I. \tag{31}$$

Ma dalla (29) si ha anche:

(32) $$y = xQS(y)$$

e quindi, per l'arbitrarietà di x,

(33) $$QS(y) = S(x)Q.$$

Ma QS(y) è una S; quindi, per AX 5 si ha:

(34) $$[QS(y)]^2 = I.$$

Di qui e dalla (33) si ottiene:

(35) $$QS(x) = S(y)Q,$$

ed anche:

(36) $$QS(y)S(x)Q = I.$$

e dalla (22):

(36a) $$QS(x)S(y)Q = I$$

Quindi, dalle (21) e (24) si ottiene

(37) $$QAQ = I.$$

Da questa, per l'involutorietà di A, e per l'abelianità del gruppo T,:

(38) $$A = Q^2.$$

Da queste, e dalle (29), segue:

(39) $$xA = yQ$$

ed anche:

(40) $$yA = yQ^2 = xAQ.$$

Quindi nel gruppo T l'operazione Q è ciclica del IV ordine.

§ 7.

Siano a, b, c tre elementi di F, tutti distinti tra loro due a due; indichieremo la terna ordinata costituita da essi con il simbolo:

$$(a,b,c). \tag{41}$$

AVVERTENZA - Nel seguito, fino ad esplicito avviso contrario, da darsi di volta in volta, quando una terna di elementi sarà indicata con il simbolo (41) sarà sottintesa l'ipotesi che i tre elementi sono tutti distinti tra loro.

Nelle pagine che seguono verrà definita implicitamente, con opportuni assiomi, una relazione tra terne ordinate di elementi di F; tale relazione sarà simboleggiata interponendo il simbolo «EQ» tra quelli di due terne, con una formula come la seguente:

$$(a,b,c)EQ(x,y,z) \tag{42}$$

che sarà letta con la frase «la terna (a,b,c) è equiversa alla terna (x,y,z)» o con frasi equivalenti.

Il fatto che tra due terne (a,b,c) ed (x,y,z) non sussiste la relazione «EQ» sarà simbolizzato mediante la formula:

$$\neg[(a,b,c)EQ(x,y,z)].$$

** AX 8 - $\forall a,b,c\{a,b,c)EQ(a,b,c)\}$

Il contenuto di questo assioma potrà essere richiamato nel seguito dicendo che esso esprime la «proprietà riflessiva» della relazione «EQ».

** AX 9 - Per tutte le terne (a,b,c), (x,y,z), (p,q,r) si ha:

$$\{(a,b,c)EQ(p,q,r)\}\&\{(a,b,c)EQ(x,y,z)\}\Rightarrow[(p,q,r)EQ(x,y,z)].$$

Il contenuto di questo assioma potrà essere richiamato nel seguito dicendo che esso esprime la «proprietà transitiva» della relazione «EQ».

Da AX 8,9 segue il

TEO. 10 - Si ha:

(43) $[(a,b,c)EQ(x,y,z)] \Rightarrow [(x,y,z)EQ(a,b,c)]$.

Il contenuto di questo teorema potrà essere richiamato nel seguito dicendo che esso esprime la «proprietà simmetrica» della relazione «EQ».

** AX 10 - Per tutte le terne (a,b,c) si ha:

$$(a,b,c)EQ(b,c,a) \text{ ed anche } (a,b,c)EQ(c,a,b).$$

** AX 11 - $\forall a,b,c,x,y,z\{[(a,b,c)EQ(x,y,z)] \vee [(a,b,c)EQ(y,x,z)]\}$.

** AX 12 - $\forall a,b,c,x,y,z\{\neg[(a,b,c)EQ(x,y,z) \vee \neg[(a,b,c)EQ(y,x,z)]\}$.

OSSERVAZIONE 6 - I due assiomi 11, 12, stabiliscono una partizione, tra le terne (x,y,z) di F, una volta che sia fissata una terna (a,b,c).

Infatti, come conseguenza di questi due assiomi, ogni terna (x,y,z) risulta essere equiversa ad (a,b,c) oppure ad (a,c,b).

** AX 13 - Dati quattro elementi a, b, c, d, tutti distinti tra loro, si ha:

(*) $(a,b,c)EQ(a,b,d) \Leftrightarrow (c,d,a)EQ(c,d,b)$.

ed anche:

(**) $(a,b,c)EQ(a,b,d) \Leftrightarrow (a,c,b)EQ(c,a,d)$

CONVENZIONE - Se vale la:

$$(a,b,c)EQ(a,b,d)$$

diremo anche che «le coppie di elementi (a,b) e (c,d) non si separano». Se invece vale la:

$$\neg(a,b,c)EQ(a,b,d)]$$

diremo che «le coppie di elementi (a,b) e (c,d) si separano».

Siano ora x ed y due elementi distinti, e sia u uno degli elementi uniti della operazione S che porta x in y; si abbia cioè:

(44) $$xS(u) = y.$$

Ricordiamo che, dagli sviluppi del §§ 2, si ha che l'altro elemento unito è:

(45) $$u' = uA.$$

** AX 14 - $\neg[(x,y,u)EQ(x,y,uA)]$

Adottando la convenzione di linguaggio or ora introdotta, esprimeremo il contenuto di questo assioma dicenco che, data una coppia qualunque di elementi distinti x,y, la coppia di elementi, uniti per l'operazione S che porta x in y, separa la coppia data.
Sempre con le notazioni del §2 si ha:

** AX 15 - $\forall x,y,z,u\{\neg[(x,y,z)EQ(xS(u),yS(u),zS(u)]\}$.

Segue di qui facilmente il:

TEO. 11 - Indicata con U una operazione qualunque del gruppo T, si ha:

$$\forall x,y,z\{(x,y,z)EQ(xU,yU,zU)\}.$$

TEO. 12 - Dati 4 elementi distinti: a,b,c,d, se è:

(46) $$(a,b,c)EQ(a,c,d),$$

allora si ha:

(46a) $$(a,b,d)EQ(b,c,d).$$

Dim. Dagli assiomi della relazioe «EQ» segue che la (46) ha come conseguenza:

$$\neg[(a,c,b)EQ(a,c,d)]$$

e da questa, sempre per gli stessi assiomi, consegue:

$$\neg[(b,d,a)EQ(b,d,c)]$$

ed infine da questa consegue la (46a).

TEO 13 - Se è:

$$(a,b,c)EQ(a,c,d)$$

allora si ha anche:

$$(a,b,c)EQ(a,b,d)$$

Dim. Nella formula (**) di AX 13, scambiando tra loro le lettere d e b si ottiene, dall'ipotesi di questo Teo.:

$$(a,d,c)EQ(a,b,d),$$

ossia:

$$(a,c,d)EQ(a,d,b),$$

e da questa, per la proprietà transitiva della relazione «EQ»:

$$(a,b,d)EQ(a,b,d),$$

che è la tesi del nostro Teo.

Fissiamo ora una terna (a,b,c) di elementi di F. Dati due elementi qualunque x,y, indicheremo con il simbolo «m(x,y)» quell'elemento z che possiede le due seguenti proprietà:

I) z è un elemento unito della operazione S che porta x in y; si ha cioè:

$$y = xS(z); \tag{47}$$

II) la terna (x,z,y) è equiversa alla (a,b,c) fissata: si ha cioè:

$$(a,b,c)EQ(x,z,y). \tag{47a}$$

Fissata la terna (a,b,c) di elementi, sia j un quarto elemento, e poniamo:

$$u = m(j,jA). \tag{48}$$

Ricordando gli sviluppi del § 6, porremo:

(49) $$u = jQ.$$

Si avrà quindi:

(48a) $$(a,b,c)EQ(j,jQ,jA);$$

ed in conseguenza del Teo. 11, si avrà anche:

(48b) $$(j,jQ,jA)EQ(jQ,jA,jAQ).$$

§ 8.

Indichiamo con N l'insieme dei numeri naturali maggiori di zero, ponendo quindi:

(50) $$N = \{1,2,3,....,n,....\},$$

e sia C una successione di simboli 0 oppure 1:

(51) $$C = \{c(i)\} \; ; \forall i\{i \in N \Rightarrow (c(i)=0) v (c(i)=1)\}.$$

Nel seguito indicheremo con C anche il vettore, i cui elementi sono quelli della successione (51), ponendo quindi:

(52) $$C = [c(1),c(2),c(3),.......,c(n),.......].$$

Nel seguito un vettore cosiffatto sarà anche chiamato convenzionalmente «vettore binario».

CONVENZIONE - Diremo convenzionalmente che il vettore (52) è «finito» se ha un numero finito di elementi uguali ad 1 (uno); quindi un vettore C sarà detto finito se vale la:

(53) $$\exists n \forall i\{(i>n) \Rightarrow (c(i)=0)\}.$$

Inoltre se tutti gli elementi del vettore C, da un certo punto in poi, sono uguali ad 1, converremo di identificarlo con il vettore finito C', che si ottiene facendo uguale ad 1 l'ultimo elemento diverso da 1. Quindi se si ha:

$$(54)\qquad (c(n) = 0)\&[\forall i\{(i>n)\Rightarrow(c(i)=1)\}],$$

porremo:

$$(55)\qquad C = C'$$

essendo C' il vettore finito i cui elementi $[c(j)]'$ sono dati da:

$$(56)\qquad \forall i\{[(i<n)\Rightarrow[[c(i)]'=c(i)]]\&[[c(n)]'= 1]\&[(i>n)\Rightarrow[[c(i)]'=0]\}.$$

OSSERVAZIONE 7 - Indichiamo con $\alpha(C)$ il numero reale definito da:

$$(57)\qquad \alpha(C) = \Sigma c(i)/2^i, \qquad (i\in N).$$

Si riconosce che il numero $\alpha(C)$ dato dalla (57) è una «mantissa», cioè soddisfa alle limitazioni:

$$(58)\qquad 0\leq\alpha(C)<1.$$

Si riconosce inoltre che le convenzioni adottate permettono di stabilire una bijezione tra i vettori C e le mantisse. Nel seguito diremo che un numero reale α, espresso nella forma (57), è una «mantissa binaria».

Le convenzioni ora stabilite, gli assiomi enunciati ed i teoremi dimostrati permettono di associare ad ogni elemento di F (punto) un vettore binario; se x è un punto di F, indicheremmo con C(x) il vettore binario che sarà associato ad x con le procedure di cui diremo subito, ed indicheremo con $\alpha(x)$ il numero soddisfacente alle (58) (mantissa), rappresentato in forma binaria dalla (57) in funzione degli elementi del vettore C(x).

Le convenzioni alle quali alludevamo poco sopra sono le seguenti:

I) all'elemento j assoceremo il vettore:

$$(60)\qquad C(j) = [0] \text{ e quindi il numero } \alpha(j) = 0.$$

II) all'elemento jA assoceremo il vettore:

$$(61)\qquad C(jA) = [1] \text{ e quindi il numero } \alpha(jA) = 0.1.$$

III) all'elemento jQ assoceremo il vettore:

$$C(jQ) = [01] \text{ e quindi il numero } \alpha(jQ) = 0.01. \tag{62}$$

IV) in generale, se a due elementi x, y sono associati i due vettori finiti D(x) e D(y), assoceremo all'elemento z=m(x,y) il vettore finito le cui componenti sono le cifre del numero:

$$\alpha(z) = \alpha[m(x,y)] = \{\alpha(x) + \alpha(y)\} /2. \tag{63}$$

Dai teoremi riguardanti la relazione «EQ» si deduce che condizione necessaria e sufficiente perché sia:

$$(x,z,y)EQ(a,b,c) \tag{64}$$

è che sia:

$$\alpha(x) < \alpha(z) < \alpha(y). \tag{65}$$

In particolare si trae di qui che, se un elemento z soddisfa alla condizione:

$$(a,b,c)EQ(j,z,jA), \tag{66}$$

la cifra c(0) del vettore D(z) soddisfa alla condizione:

$$c(0) = 0, \tag{67}$$

e viceversa. Se invece un elemento z soddisfa alla condizione:

$$(a,b,c)EQ(jA,z,j), \tag{68}$$

la cifra c(0) del vettore soddisfa alla condizione:

$$c(0) = 1. \tag{69}$$

Da ciò che precede si trae che ogni elemento z dell'insieme determina un vettore C(z) e quindi una mantissa α(z), cioè un numero reale soddisfacente alla (58), espresso dalla (57) in funzione degli elementi del vettore C(z).

** AX 16 - ad ogni vettore binario C corrisponde un elemento di F.

Questo assioma stabilisce una bijezione tra l'insieme F e i numeri reali soddisfacenti alle condizioni (58); esso può essere chiamato «assioma di continuità» per l'insieme F.

* * *

§ 9.

Nel § precedente abbiamo stabilito un insieme di convenzioni che permettono di associare biunivocamente ad ogni elemento di F un numero reale α dell'insieme (58). Tale numero può essere chiamato «coordinata» dell'elemento di F a cui corrisponde.

Queste coordinate permettono di rappresentare le operazioni dell'insieme S e del gruppo T mediante operazioni nell'anello R/(1) delle mantisse dei numeri reali.

Infatti l'operazione S(u) che porta l'elemento x nell'elemento y viene rappresentata dalla equazione:

$$\alpha(x) = \alpha(y) \equiv 2\cdot\alpha(u) \pmod{1}, \tag{70}$$

ed un'operazione del gruppo T viene rappresentata dall'equazione:

$$\alpha(y) \equiv \alpha(x) + k \pmod{1}. \tag{71}$$

Per rappresentare la relazione «EQ» poniamo:

$$\theta(x) = \tan[\pi\cdot\alpha(x)]. \tag{72}$$

Con questa posizione, la relazione:

$$(x,y,z)EQ(a,b,c) \tag{73}$$

viene rappresentata con la equazione:

$$\operatorname{sgn}\{[\theta(z)-\theta(x)]\cdot[\theta(z)-\theta(y)]\} = \operatorname{sgn}\{[\theta(c)-\theta(a)]\cdot[\theta(c)-\theta(b)]\}. \tag{74}$$